Exercice 4 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\ln(1+tanx)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

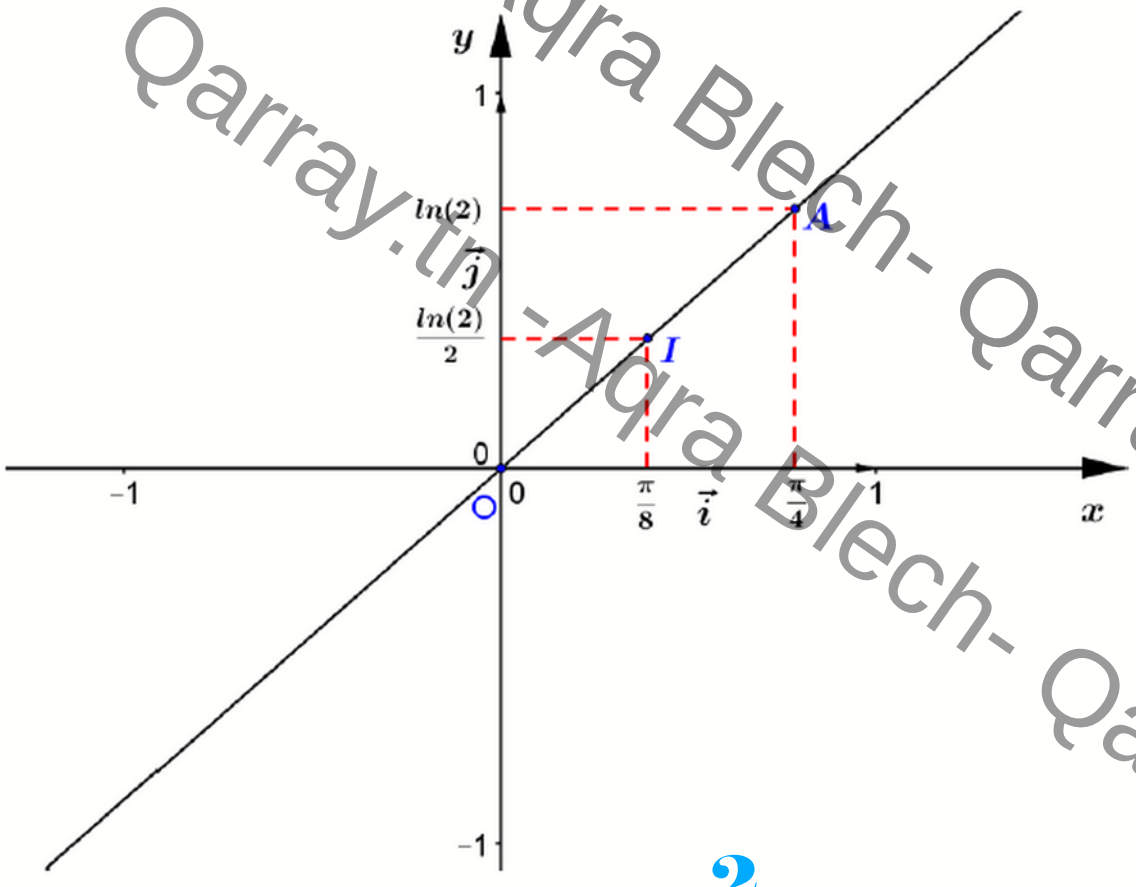
2°) a) Vérifier que les points O, $A\left(\frac{\pi}{4},\ln 2\right)$ et $I\left(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2}\right)$ sont des points de (C).

(On donne $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$).

b) Montrer que $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2-f(x)$ pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$. (On rappelle que $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$).

c) Justifier alors que le point I est un centre de symétrie de la courbe (C).

Dans la figure ci-dessous, on a placé les points I et A dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.



Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn
Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn